OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a XI-a
Soluţii şi bareme

SUBIECTUL I

După calcule, relaţia poate fi scrisă

$$\begin{aligned} x_n &= \cos\frac{\pi}{12}x_{n-1} + \sin\frac{\pi}{12}y_{n-1}, \\ y_n &= -\sin\frac{\pi}{12}x_{n-1} + \cos\frac{\pi}{12}y_{n-1}, \end{aligned}$$

sau,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}; \qquad unde \quad A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{12} & \sin\frac{\pi}{12} \\ -\sin\frac{\pi}{12} & \cos\frac{\pi}{12} \end{pmatrix} ....2p$$

Prin inducţie se obţine

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{12} & \sin\frac{n\pi}{12} \\ -\sin\frac{n\pi}{12} & \cos\frac{n\pi}{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, ...3p$$

iar de aici

$$x_n = \cos\frac{n\pi}{12}x_0 + \sin\frac{n\pi}{12}y_0; y_n = -\sin\frac{n\pi}{12}x_0 + \cos\frac{n\pi}{12}y_0,$$

cu $x_{n+24} = x_n$, $y_{n+24} = y_n$, $\forall n \geq 1$, deci perioada căutată este $T = 24$......2p

SUBIECTUL II

Relaţia:

$$2n^2(a_{n+1} - a_n - 1) + n(a_{n+1} - 3a_n) + 2a_n = n^4 + 3n^3, \qquad \forall n \geq 1$$

poate fi scrisă $n(2n+1)a_{n+1} - (n+2)(2n-1)a_n = n^2(n+1)(n+2)$ adică

$$\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}a_{n+1} - \frac{2n-1}{n(n+1)}a_n = n.....2p$$

Iar prin sumare $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}a_{n+1} - \frac{2n-1}{n(n+1)}a_n\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} k$ obţinem $a_n = \frac{n(n+1)(n^2-n+1)}{2(2n-1)}$ .....3p şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$,......1p iar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{a_n} = \sqrt[4]{e}$.....1p

SUBIECTUL III

a) $A \cdot B = I_n$ implică $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 1$ iar de aici $\det B \neq 0$, B inversabilă, şi fie B^{-1} inversa sa......1p
Înmulţind la dreapta relaţia $A \cdot B = I_n$ cu B^{-1}, obţinem $A = B^{-1}$, iar înmulţind la stânga cu B avem $BA = I_n$, deci $A \cdot B = B \cdot A$......2p
b) Dacă $pA + qB = A \cdot B$, $A \cdot B - pA - qB = O_n$ iar adunând pqI_n avem $(A - qI_n)(B - pI_n) = pqI_n$. Împărţind prin pq obţinem $(\frac{1}{q}A - I_n)(\frac{1}{p}B - I_n) = I_n$.......1p
Conform punctului anterior, $(\frac{1}{q}A - I_n)(\frac{1}{p}B - I_n) = (\frac{1}{p}B - I_n)(\frac{1}{q}A - I_n)$, iar de aici rezultă $A \cdot B = B \cdot A$......2p
Acum avem

$$A^pB^q = A^p\underbrace{B \cdot B \cdot ... \cdot B}_{q\ ori} = BA^p\underbrace{B \cdot B \cdot ... \cdot B}_{q-1\ ori} = ... = B^qA^p......1p$$

SUBIECTUL IV
Folosim faptul că dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ şi $X^n = O_2$ atunci $X^2 = O_2$ ($X^n = O_2 \Longrightarrow \det X = 0 \Longrightarrow X^2 = (trX) \cdot X \Longrightarrow X^n = (trX)^{n-1} \cdot X \Longrightarrow X = O_2 \quad sau \quad trX = 0 \Longrightarrow X^2 = O_2$).....1p
Presupunem că $A + B$ nilpotentă. $(A + B)^2 = O_2 \Longrightarrow A^2 + AB + BA + B^2 = O_2 \Longrightarrow AB + BA = O_2 \Longrightarrow trAB = -trBA = -trAB \Longrightarrow trAB = trBA = 0 \det AB = \det BA = 0$. Astfel,$(AB)^2 - (trAB)AB + (\det AB)I_2 = O_2$, deci $(AB)^2 = O_2$.....2p
Analog $(BA)^2 = O_2$, deci $A \cdot B$ şi $B \cdot A$ sunt nilpotente......2p
Să presupunem acum că $A \cdot B$ şi $B \cdot A$ sunt nilpotente. Atunci $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = AB + BA$.
$(A + B)^4 = (AB)^2 + AB^2A + BA^2B + (BA)^2 = O_2 + O_2 + O_2 + O_2 = O_2$, deci $A + B$ sunt nilpotente......2p